TD n° 8 – Applications de la formule des traces

Exercice 1. *Loi de Weyl* Soit $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ une surface hyperbolique compacte. On note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres du laplacien de S inférieures ou égales à λ, pour $\lambda > 0$. On admettra le théorème suivant (appelé *théorème Taubérien*) : si μ est une mesure borélienne sur $[0, \infty)$, on pose pour tout $t > 0$
$$\widehat{\mu}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} d\mu(x).$$
Pour tout $r \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}$, les convergences suivantes sont équivalentes :
$$\lim_{t\to 0} t^r \widehat{\mu}(t) = a,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-r}\mu([0, \lambda]) = \frac{a}{\Gamma(r + 1)}.$$

1. Montrer l'égalité suivante
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\lambda_n} = \frac{\text{Aire(S)}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho d\rho}{\sinh(\rho/2)} + \frac{e^{-\frac{t}{4}}}{2\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{P}(S)} \frac{\ell(\gamma)e^{-\frac{\ell(\gamma^n)^2}{4t}}}{\sinh(\ell(\gamma^n)/2)}.$$

2. En déduire que, lorsque $t \to 0$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{\text{Aire}(S)}{4t}(1 + o(1)).$$

3. Montrer la *loi de Weyl* : pour $\lambda > 0$, lorsque $\lambda \to \infty$,
$$N(\lambda) \sim \frac{\text{Aire}(S)}{4\pi}\lambda.$$

Exercice 2. *Théorème de Huber* Étant donné une surface hyperbolique compacte $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, on définit son spectre géodésique par l'ensemble
$$\{\ell(\gamma),\ \gamma \text{ géodésique fermée orientée}\}.$$
L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : deux surfaces hyperboliques compactes S et S' de genre $g \geq 2$ ont le même spectre du laplacien si et seulement si elles ont le même spectre géodésique.

1. On suppose que le spectre du laplaciens de S est fixé. On note $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty$ les valeurs propres.
   (a) À l'aide de l'exercice 1, montrer que la fonction
   $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{P}(S)} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(\frac{1}{2}\ell(\gamma^n))} e^{-\frac{\ell^2(\gamma^n)}{4t}}$$
   est entièrement déterminée par le spectre.
   (b) Soit γ_1 la plus petite géodésique fermée orientée. Caractériser $\ell(\gamma_1)$ à l'aide de f et en déduire que $\ell(\gamma_1)$ est déterminée par les valeurs propres.
   (c) Montrer que le reste du spectre géodésique est bien déterminé par les valeurs propres.

2. Réciproquement, on suppose que les spectres géodésiques sont identiques.

   (a) En étudiant la fonction

$$F(t) = \sum_{0<\lambda_n\leq\frac{1}{4}} e^{-\lambda_n t} - \frac{\text{Aire(S)}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho d\rho}{\sinh(\rho/2)} + \sum_{\lambda_n>\frac{1}{4}} e^{-\lambda_n t},$$

   caractériser les valeurs propres plus petites que $\frac{1}{4}$ à l'aide du spectre géodésique. (Indice : que dire des réels ω tels que $\lim_{t\to\infty} e^{\omega t}F(t)$ existe et soit positif ?)

   (b) Montrer que le reste du spectre est également caractérisé par le spectre géodésique.